5) Vérifier, à l'aide de la formule de LEIBNIZ, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, L_n(X) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}X^n} \left[(X^2-1)^n\right].$$

6) En déduire explicitement le coefficient dominant de L_n, puis la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

7) Montrer alors que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |L_n(x)| \leqslant \left(\frac{1+|x|}{2}\right)^n \binom{2n}{n}.$$

8) On définit, pour tout entier naturel n, le polynôme $U_n(X) = (X^2-1)^n$.

a) Vérifier que :

$$(X^2-1)\, U_n'(X) = 2nXU_n(X).$$

b) En dérivant $n+1$ fois cette relation, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \phi(L_n) = n(n+1)L_n.$$

Partie C : Définition d'un produit scalaire

On pose

$$\forall (P,Q) \in E^2, \langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\ \mathrm{d}x.$$

1) Justifier que l'on a ainsi défini un produit scalaire sur E.

Dans toute la suite du problème, l'espace E et ses sous-espaces E_n ($n \in \mathbb{N}$) seront systématiquement munis de ce produit scalaire.

2) a) Montrer que

$$\forall (P,Q) \in E^2, \langle \phi(P), Q\rangle = \int_{-1}^{1} (1-x^2)P'(x)Q'(x)\ \mathrm{d}x.$$

b) Que peut-on dire déduire pour les endomorphismes φ_n ($n \in \mathbb{N}$) ?

c) En déduire, à l'aide d'un résultat de la partie B, que les polynômes L_p ($p \in \mathbb{N}$) sont deux à deux orthogonaux.

3) Soit n un entier naturel.

a) Établir par récurrence sur k que

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \langle Q, L_n\rangle = \frac{(-1)^k}{2^n n!} \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}[Q(x)] \frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}}\left[(x^2-1)^n\right] \mathrm{d}x.$$

b) En déduire que, poour tout $n \in \mathbb{N}^*$, L_n est orthogonal à E_{n-1}.

c) Retrouver ainsi que les polynômes L_p ($p \in \mathbb{N}$) sont deux à deux orthogonaux.

4) a) À l'aide de **C.3)a)**, exprimer, pour tout entier naturel n, $\|L_n\|^2$ en fonction de

$$I_n = \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n\ \mathrm{d}x.$$

b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = -\frac{2n+2}{2n+3} I_n.$$

c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de I_n faisant intervenir des factorielles.

d) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|L_n\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}.$$

5) Donner, pour tout entier naturel n, une base orthonormée de E_n.

Partie D : Une relation de récurrence

Soit n un entier naturel non nul.

1) Calculer le coefficient de X^{n+1} dans $(n+1)L_{n+1}(X) - (2n+1)XL_n(X)$.

2) En déduire l'existence et l'unicité de $n+1$ réels α_k tels que
$$(n+1)L_{n+1}(X) - (2n+1)XL_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k L_k(X).$$

3) Montrer que $\forall k \in [|0,n|]\,, \alpha_k = -(2n+1)\dfrac{\langle XL_n, L_k\rangle}{\|L_k\|^2}$.

4) Pour tout $k \in [|0, n-2|]$, vérifier que $\langle XL_n, L_k\rangle = \langle L_n, XL_k\rangle$ puis montrer que $\alpha_k = 0$.

5) Par des considérations de parité, montrer que $\alpha_n = 0$.

6) En utilisant la valeur des polynômes L_k au point 1, déterminer alors α_{n-1}.

7) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)L_{n+1}(X) - (2n+1)XL_n(X) + nL_{n-1}(X) = 0$.

Partie E : Fonction génératrice

On fixe un réel t et on considère la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} L_n(t)x^n$, de la variable réelle x.

1) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\dfrac{1+|t|}{2}\right)^n \binom{2n}{n} x^n$.

2) En déduire que le rayon de convergence R_t de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} L_n(t)x^n$ est strictement positif.
On donnera une minoration de R_t, mais on ne cherchera pas à le calculer.

On note S_t la somme de cette série entière : $\forall x \in]-R_t, R_t[\,, S_t(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} L_n(t)x^n$

3) En utilisant le résultat de D.7), montrer que S_t est solution sur $]-R_t, R_t[$ de l'équation différentielle suivante, d'inconnue y fonction de x :
$$(\mathscr{E}_t)\ (1-2tx+x^2)y'(x) + (x-t)y(x) = 0$$

4) Pour $|t| < 1$, en déduire l'expression de $S_t(x)$ en fonction de x.

Partie F : Projection orthogonale, calcul de distance

1) Calculer, pour tout entier naturel k, l'intégrale
$$J_k = \int_{-1}^{1} x^k \, \mathrm{d}x.$$

2) Étant donnés deux entiers naturels n et r, tels que $0 \leqslant r \leqslant n$, on note p_r la projection orthogonale de E_n sur son sous-espace vectoriel E_r.
Donner une expression générale de $p_r(P)$ utilisant le produit scalaire, pour tout polynôme P de E_n.

3) On suppose désormais $n = 3$ et $P = X^3$.
   a) Déterminer $p_0(P)$, $p_1(P)$ et $p_2(P)$.
   b) Calculer les distances $d(P, E_k)$ de P aux sous-espaces vectoriels E_k pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant 2$.

4) On note G l'ensemble des polynômes de degré 3 et de coefficient dominant égal à 1.
Montrer l'existence de
$$m = \min_{Q\in G} \int_{-1}^{1} (Q(x))^2 \, \mathrm{d}x$$
et préciser sa valeur, ainsi que les polynômes réalisant ce minimum.

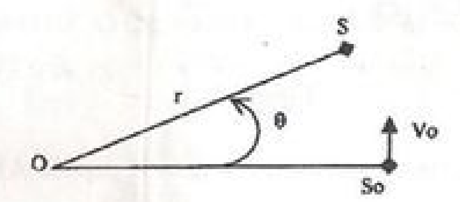
Fin de l'énoncé

1.b. Montrer que le champ gravitationnel s'écrit $\vec{g} = -\frac{GM}{r^2}\overrightarrow{u_r}$ avec $\overrightarrow{u_r} = \frac{\vec{r}}{r}$ et $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$. En déduire le potentiel V crée par la terre en tout point P de l'espace. On rappelle que $\vec{g} = -\overrightarrow{grad}V$

2. Etude du mouvement du satellite :

2.a. Montrer que le mouvement du satellite est plan.

2.b. Dans le plan de la trajectoire, la position S du satellite est définie par ses coordonnées polaires: $r = OS$ et $\theta = (\overrightarrow{OS_0}, \overrightarrow{OS})$.



Montrer que $C = r^2 \frac{d\theta}{dt}$ est constante et calculer sa valeur en fonction de R, h et v_0.

2.c. Appliquer le principe fondamental de la dynamique au satellite. Montrer que l'équation s'intègre en : $\vec{v} = \frac{MG}{C}(\vec{u}_\theta + \vec{e})$ où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse et $\vec{e}$ est un vecteur constant que l'on calculera en fonction de v_0, C, G et M. On pose $e = \frac{\vec{e}.\vec{v}_0}{v_0}$.

2.d. En projetant $\vec{v}$ sur $\vec{u}_\theta$, en déduire l'équation de la trajectoire sous la forme :

$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}$ et calculer p et θ_0.

3.a. Calculer la vitesse de libération v_l à l'altitude h et donner, selon la valeur de v_0, la nature de la trajectoire. Calculer la valeur v_C de v_0 correspondant à une trajectoire circulaire d'altitude h.

3.b. Donner l'expression de l'énergie mécanique E_m et calculer sa valeur en fonction de e, m G, M et C. Retrouver la nature de la trajectoire en fonction des valeurs de E_m.

3.c. Dans le cas d'une trajectoire elliptique, on note a le demi grand axe. Calculer E_m en fonction de a, G, m et M.

4.a. On suppose $v_0 < v_l$. A quelle condition, la position initiale S_0 du satellite est-elle le périgée de la trajectoire ? Dans ce cas, déterminer la position A de l'apogée et la vitesse en ce point.

4.b. En A, on modifie quasi instantanément la vitesse du satellite pour que sa trajectoire soit désormais circulaire. Calculer la vitesse en A sur la nouvelle orbite circulaire et la variation relative de vitesse.

3ème partie : Electricité

Réponse d'un circuit R-C à un échelon de tension

Un dipôle **AB** est constitué d'un résistor de résistance R en série avec un condensateur de capacité C (figure **1**).

Lorsque l'interrupteur **K** est en position **(1)**, le dipôle est alimenté par une source de tension de f.é.m. E constante et de résistance r.

EHTP

L'épreuve comporte trois parties indépendantes.

1ère partie : Etude d'un skieur :

On étudie le mouvement d'un skieur descendant une piste selon la ligne de plus grande pente, faisant l'angle α avec l'horizontale.

L'air exerce une force de frottement supposée de la forme $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$, où λ est un coefficient constant positif et $\vec{v}$ la vitesse du skieur.

On note $\vec{T}$ et $\vec{N}$ les composantes tangentielle et normale de la force de frottement exercée par la neige et f le coefficient de frottement solide.

On choisit comme origine de l'axe Ox de la ligne de plus grande pente la position initiale du skieur, supposé partir à l'instant initial avec une vitesse négligeable. On note Oy la normale à la piste dirigée vers le haut.

1. Donner l'unité SI de λ.
2. Calculer $\vec{T}$ et $\vec{N}$.
3. Calculer la vitesse $\vec{v}$ et la position x du skieur à chaque instant.
4. Montrer que le skieur atteint une vitesse limite $\vec{v}_l$ et calculer $\vec{v}$ en fonction de v_l .

   A.N. Calculer v_l avec $\lambda = 1$ S.I. , f = 0,9 , g = 10 m/s^2 , m = 80 kg et $\alpha = 45°$

   (on prendra $\sqrt{2} = 1,4$)
5. Calculer littéralement et numériquement la date t_1 où le skieur a une vitesse égale à $\frac{v_l}{2}$.

   On prendra Ln(2) = 0,7.
6. Calculer littéralement les variations d'énergie cinétique et potentielle entre t = 0 et t_1, en fonction de m, g, t_1 , v_l et α.
7. En déduire le travail de la force de frottement $\vec{F}$ entre ces mêmes instants, en fonction de m et v_l . Retrouver directement ce résultat.

2ème partie : Lancement d'un satellite :

On considère un satellite artificiel de la Terre, de masse m constante. Il est supposé soumis à la seule action du champ de gravitation terrestre.

On considère la Terre comme une sphère de masse M, à répartition uniforme de masse, de rayon R et de centre O.

A l'instant choisi comme origine des temps, le satellite est situé en un point S_0 d'altitude h et est animé d'une vitesse $\vec{v}_0$, orthogonale à OS_0 .

1 .Préliminaire :

On rappelle la loi locale vérifiée par le champ de gravitation $\vec{g}$ en un point P quelconque:

$\mathrm{div}(\vec{g}) = -4\pi G \rho$,

où G est la constante de gravitation universelle et ρ la masse volumique en P.

1.a. Donner l'équivalent électrostatique de cette relation. Justifier l'analogie entre électrostatique et gravitation.

Les extrémités **A** et **B** du dipôle peuvent être court-circuitées en plaçant l'interrupteur en position **(2).**

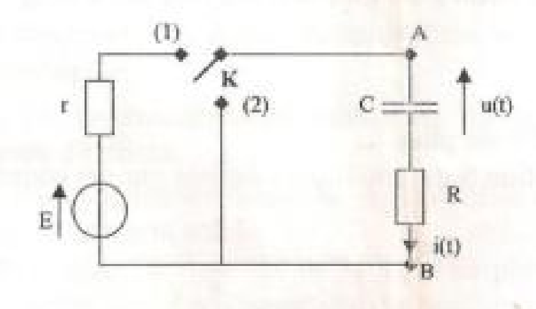


Figure 1

i(t) désigne l'intensité instantanée du courant dans le dipôle **AB** et u(t) la tension aux bornes du condensateur.

Le condensateur étant initialement déchargé, on place l'interrupteur **K** en position (1), à l'instant initial $t = 0$.

1) On s'intéresse à la charge du condensateur.

1.1. Déterminer l'équation différentielle liant u(t) et t.
1.2. En déduire la fonction u(t).
1.3. Qu'appelle-t-on constante de temps τ du circuit ?

1.4. Donner l'expression de l'intensité i(t).

1.5. Représenter graphiquement l'allure des fonctions u(t) et i(t).

1.6. *Application numérique.* $R = 1\ k\Omega$; $r = 100\ \Omega$; $C = 15\ \mu F$.

Donner un ordre de grandeur du temps de charge du condensateur.

1.7. Montrer qu'au bout d'un temps infini, l'énergie fournie par le générateur est également répartie entre le condensateur et la résistance (r+R).

2) Au bout d'un temps très long t', on bascule l'interrupteur en position **(2).**
2.1. Déterminer la fonction u(t).
2.2. Donner l'expression de i(t).
2.3. Représenter graphiquement ces deux fonctions.
2.4 Donner, sans démonstration, la forme sous laquelle le condensateur restitue, au cours de la décharge, l'énergie qu'il avait emmagasinée.

3) On place en série avec C une bobine d'inductance L et de résistance négligeable, le dipôle RLC ainsi obtenu est alimenté par un générateur de tension sinusoïdal de pulsation ω et d'amplitude E et de résistance interne négligeable.

3.1. Déterminer la valeur efficace du courant électrique qui traverse le dipôle en fonction de R, L, C, E et ω

3.2. Calculer la tension aux bornes du condensateur, en déduire la valeur maximale de sa valeur efficace.